Branching rules for level-zero extremal weight modules from $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$ to $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$

京都大学　大学院理学研究科　数学・数理解析専攻
中岡周太郎 (Shutaro NAKAOKA) *

概要

表現の分岐則とは，ある代数系の表現をその部分代数系に制限したとき，どのように振る舞うかを記述する規則である．本稿では，量子アフィン展開環 $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$ のレベル・ゼロ extremal ウェイト加群を $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ に制限したときの分岐則にまつわる筆者の結果を紹介する．

1　導入

$\mathfrak{g}$ を対称化可能な Kac-Moody 代数，$U_q(\mathfrak{g})$ を 神保 [5] と Drinfeld [2] によって導入された $\mathfrak{g}$ に付随する**量子展開環**とする．量子展開環やその表現論は理論物理における可解格子模型の研究の中で自然に表れ，特に ***R* 行列**との関連から数学・物理の両面に重要な応用を与えていることが知られている．また，量子展開環のあるクラスの加群は $q \to 0$ という極限において**結晶基底**と呼ばれる基底を持ち，組み合わせ論的なデータを抽出することができることも量子展開環の表現論の大きな特徴である．

柏原 [7] は，任意のウェイト λ に対して，**extremal ウェイト加群**と呼ばれる $U_q(\mathfrak{g})$-加群 $V(\lambda)$ を導入した．これは可積分最高ウェイト加群の一般化になっており，結晶基底 $\mathcal{B}(\lambda)$ を持つ．以下，ここでは量子アフィン展開環，すなわち $\mathfrak{g}$ がアフィン型の Kac-Moody 代数の場合を主に考える．アフィン・リー代数 $\mathfrak{g}$ のウェイト λ に対し，canonical central element c との ペアリング の値を λ の**レベル**という．λ のレベルが正 (resp. 負) の場合には，$V(\lambda)$ は最高ウェイト加群 (resp. 最低ウェイト加群) と同型になり，本稿で扱うのは λ のレベルが 0 の場合である．柏原 [9, Section 13] は，$\mathcal{B}(\lambda)$ の構造に関してある予想を提示し，これは最終的に Beck-中島 [1] によって解決された．また，石井-内藤-佐垣 [4] は $\mathfrak{g}$ が untwisted な場合に**半無限 Lakshmibai-Seshadri パス模型** と呼ばれる $\mathcal{B}(\lambda)$ の組み合わせ論的な実現を与えた．これらの結果によって $\mathfrak{g}$ がアフィン型の場合において，レベル・ゼロ extremal ウェイト加群の結晶基底 $\mathcal{B}(\lambda)$ の構造について大きく理解が進んだと言えるだろう．

さて，今回のテーマである**分岐則**とは，ある代数系の表現をその部分代数系に制限したときにどのように振る舞うかを記述する規則である．古典的な例としては一般線形群 $GL_{n+1}(\mathbb{C})$ の既約有理表現を $GL_n(\mathbb{C})$ に制限したときの分岐則などが挙げられる．また，量子展開環の間の埋め込み

* E-mail:nakaoka.shutaro.53d@st.kyoto-u.ac.jp

$U_q(\mathfrak{g}) \hookrightarrow U_q(\mathfrak{g}')$ が，Dynkin 図形の埋め込みから生じる埋め込みであるとき，$U_q(\mathfrak{g}')$ の可積分最高ウェイト加群 $V(\lambda)$ を $U_q(\mathfrak{g})$ に制限しときの分岐則は，$V(\lambda)$ の結晶基底 $\mathcal{B}(\lambda)$ を自然に $U_q(\mathfrak{g})$ の加群としての結晶基底とみなしたときの最高ウェイト元をカウントすることで得られる [8, Section 4.6].

本稿では，$\Psi_{\pm 1} : U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n) \hookrightarrow U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$ という埋め込みによって $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$ のレベル・ゼロ extremal ウェイト加群を $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ に制限したときの分岐則に関して筆者が得た結果を紹介する．このような埋め込みがあることは量子展開環の定義関係式を見ただけでは全く明らかではないが，アフィン・リー代数の対応する単純リー代数のループ代数の中心拡大としての表示を思い出すと自然な埋め込み $\widehat{\mathfrak{sl}}_n \hookrightarrow \widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1}$ があることはわかる．量子アフィン展開環にも **Drinfeld 実現**と呼ばれる，アフィン・リー代数におけるループ代数の中心拡大としての表示に対応する表示があり [3], これを手掛かりに $\Psi_{\pm 1} : U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n) \hookrightarrow U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$ という埋め込みも構成することができる．この埋め込み $\Psi_{\pm 1} : U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n) \hookrightarrow U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$ を通じて $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ の Chevalley 生成元 E_0, F_0 は $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$ の Chevalley 生成元に対応して**いない**ため，上で述べた Dynkin 図形の埋め込みから誘導される埋め込みとは状況が違うことに留意されたい．このため，$U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$ の加群の結晶基底が自然に $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ の加群としての結晶基底を誘導せず，この状況では結晶基底の構造のみに着目して分岐則を得ることは期待できないと思われる．したがって，このような方向性の分岐則を調べることで，結晶基底の構造から直接導くことができない，新たなレベル・ゼロ extremal ウェイト加群の性質が明らかになることが期待される．

2 準備

2.1 アフィン・ルート・データ

量子アフィン展開環の定義に必要な，アフィン・ルート・データを設定する．なおアフィン・リー代数に関する設定については [6] に準拠しており，また untwisted な場合に限定することとする．

$A = (a_{ij})_{i,j \in I}$ $(I = \{0, \ldots, n\})$ を，(untwisted) アフィン型一般化カルタン行列とする．ただし，単純ルートの番号付けは [6, Section 4.8] に与えられているものと同じであるとする．A に付随する ($\mathbb{Q}$ 上の) アフィン・リー代数を $\mathfrak{g}$ とし，そのカルタン部分代数を $\mathfrak{h}$ とする．$\{\alpha_i \mid i \in I\} \subset \mathfrak{h}^*$ を単純ルートの集合，$\{\alpha_i^\vee \mid i \in I\} \subset \mathfrak{h}$ を単純コルートの集合とする．

$d \in \mathfrak{h}$ を，$\langle d, \alpha_j \rangle = \delta_{0j}$ $(j \in I)$ を満たすように固定する．また，$c = \sum_{i \in I} a_i^\vee \alpha_i^\vee$ を canonical central element，$\delta = \sum_{i \in I} a_i \alpha_i$ を虚ルートの生成元とする．ここで，$a_i^\vee$ $(i \in I)$ は dual Kac label [6, Section 6.1]，a_i $(i \in I)$ は Kac label [6, Section 4.8] である．

$j \in I$ に対し，基本ウェイト $\Lambda_j \in \mathfrak{h}^*$ を，$\langle h_i, \Lambda_j \rangle = \delta_{ij}$ $(i \in I)$, $\langle d, \Lambda_j \rangle = 0$ を満たすように定める．ウェイト格子 P を $P = \left(\bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}\Lambda_i\right) \oplus \mathbb{Z}\delta$ と定め，コウェイト格子 P^* を $P^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P, \mathbb{Z}) = \left(\bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}\alpha_i^\vee\right) \oplus \mathbb{Z}d$ により定める．

$\mathfrak{g}$ 上の不変対称双線型形式 $(\cdot,\cdot)$ は，任意の $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して $\langle c, \lambda \rangle = (\delta, \lambda)$ を満たすように正規化されているものと仮定する．このとき，$(\alpha_i, \alpha_j) = a_i^\vee a_i^{-1} a_{ij}$ $(i, j \in I)$ である．$W = \langle s_i \mid i \in I \rangle \subset GL(\mathfrak{h}^*)$ を $\mathfrak{g}$ の Weyl 群とする．ここで，$s_i(\lambda) = \lambda - \langle \alpha_i^\vee, \lambda \rangle \alpha_i$ $(\lambda \in \mathfrak{h}^*)$ は α_i に対応する単純鏡映である．

$I_0 = I \setminus \{0\}$ とおく．$W_0 = \langle s_i \mid i \in I_0 \rangle$, $Q_0^\vee = \bigoplus_{i \in I_0} \mathbb{Z}\alpha_i^\vee$ とおく．$\xi \in Q_0^\vee$ に対し，$t_\xi \in W$ を

$$t_\xi(\lambda) = \lambda + \langle c, \lambda \rangle \nu(\xi) - \left(\langle \xi, \lambda \rangle + \frac{1}{2}(\xi, \xi)\langle c, \lambda \rangle \right) \delta$$

によって定める．ここで，$\nu : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}^*$ は

$$\langle h_1, \nu(h_2) \rangle = (h_1, h_2) \quad (h_1, h_2 \in \mathfrak{h})$$

によって定義される写像である．

2.2 量子アフィン展開環とレベル・ゼロ extremal ウェイト加群

$D > 0$ を 任意の $i \in I$ に対して $\frac{(\alpha_i, \alpha_i)}{2} \in D^{-1}\mathbb{Z}$ を満たす最小の正整数とする．q を不定元とし、$q_s = q^{\frac{1}{D}}$ とおく．また，$q_i = q^{\frac{(\alpha_i, \alpha_i)}{2}}$ と定義する．整数 $m \geq 0$ に対して，$[m]_{q_i} = \frac{q_i^m - q_i^{-m}}{q_i - q_i^{-1}}$ と定義する．さらに，整数 $m \geq 0$ に対し， $[m]_{q_i}! = [m]_{q_i}[m-1]_{q_i} \cdots [1]_{q_i}$ とおく．

量子アフィン展開環 $U_q(\mathfrak{g})$ を，$\mathbb{Q}(q_s)$ 上 E_i, F_i, q^h $(i \in I, h \in D^{-1}P^*)$ で生成され，以下の関係式で定義される，1 を持つ結合代数とする:

$$\begin{gathered}
q^0 = 1, \quad q^{h+h'} = q^h q^{h'} \quad (h, h' \in D^{-1}P^*), \\
q^h E_i q^{-h} = q^{\langle h, \alpha_i \rangle} E_i, \quad q^h F_i q^{-h} = q^{-\langle h, \alpha_i \rangle} F_i \quad (i \in I, h \in D^{-1}P^*), \\
E_i F_j - F_j E_i = \delta_{ij} \frac{t_i - t_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}} \quad (i, j \in I), \\
\sum_{s=0}^{1-a_{ij}} (-1)^s E_i^{(s)} E_j E_i^{(1-a_{ij}-s)} = 0, \quad \sum_{s=0}^{1-a_{ij}} (-1)^s F_i^{(s)} F_j F_i^{(1-a_{ij}-s)} = 0 \quad (i, j \in I,\ i \neq j),
\end{gathered}$$

ここで，$t_i = q^{\frac{(\alpha_i, \alpha_i)}{2}\alpha_i^\vee}$, $E_i^{(m)} = \frac{E_i^m}{[m]_{q_i}!}$, $F_i^{(m)} = \frac{F_i^m}{[m]_{q_i}!}$ $(i \in I)$ である．

詳細は省くが，$U_q(\mathfrak{g})$ は余積と対合射，余単位射を備えており，Hopf 代数になる．

$U_q^+(\mathfrak{g})$ (resp. $U_q^-(\mathfrak{g})$) を $\{E_i \mid i \in I\}$ (resp. $\{F_i \mid i \in I\}$) で生成された $U_q(\mathfrak{g})$ の部分代数とする．また，$U_q^0(\mathfrak{g})$ を $\{q^h \mid h \in D^{-1}P^*\}$ で生成された $U_q(\mathfrak{g})$ の部分代数とする．このとき，**三角分解**

$$U_q(\mathfrak{g}) \cong U_q^+(\mathfrak{g}) \otimes U_q^0(\mathfrak{g}) \otimes U_q^-(\mathfrak{g})$$

が成り立つ．

$U_q(\mathfrak{g})$-加群 M は次の条件を満たすとき，**可積分**という:

1. M は**ウェイト空間分解**

$$M = \bigoplus_{\lambda \in P} M_\lambda, \quad M_\lambda = \{u \in M \mid \forall h \in D^{-1}P^*,\ q^h u = q^{\langle h, \lambda \rangle}\}$$

   をもつ．

2. 任意の $u \in M$ および $i \in I$ に対してある $N \geq 1$ が存在し，任意の $m \geq N$ に対して $E_i^{(m)} u = F_i^{(m)} u = 0$ が成り立つ．

任意の $i \in I$ および 可積分 $U_q(\mathfrak{g})$-加群 M に対し，$\mathbb{Q}(q_s)$-線形同型写像 $T_i : M \to M$ がある．(T_i については [11, Chapter 5] を参照のこと．なお，[11, Chapter 5] では，$T''_{i,1}$ という記号が使われている．)

また，各 $i \in I$ に対し，自己同型 $T_i : U_q(\mathfrak{g}) \to U_q(\mathfrak{g})$ であって，任意の可積分 $U_q(\mathfrak{g})$-加群 M，$x \in U_q(\mathfrak{g})$ および $u \in M$ に対し，

$$T_i(xu) = T_i(x)T_i(u)$$

を満たすものがある．(T_i については [11, Chapter 5] を参照のこと．なお，[11, Chapter 5] では，$T''_{i,1}$ という記号が使われている．)

Defintion 2.1. M を可積分 $U_q(\mathfrak{g})$-加群，$i \in I$ とする．ウェイト λ のベクトル $u \in M$ が，$E_i u = 0$ または $F_i = 0$ を満たすとき，u を i-extremal という．このとき，$S_i u$ を

$$S_i u = \begin{cases} F_i^{(\langle \alpha_i^\vee , x\lambda \rangle)} u & (\langle \alpha_i^\vee , x\lambda \rangle \geq 0) \\ E_i^{(-\langle \alpha_i^\vee , x\lambda \rangle)} u & (\langle \alpha_i^\vee , x\lambda \rangle \leq 0) \end{cases}$$

によって定義する．

Defintion 2.2. M を可積分 $U_q(\mathfrak{g})$-加群とする．ウェイトベクトル $u \in M$ は，任意の $p \geq 0$ および $i, i_1, \ldots, i_p$ に対して $S_{i_1} \cdots S_{i_p} u$ が i-extremal であるとき，**extremal ベクトル**という．

$u \in M$ が extremal のとき，$x = s_{i_1} \ldots s_{i_p} \in W$ に対して

$$S_x u = S_{i_1} \cdots S_{i_p} u$$

によって $S_x u$ を定義する．これは x の表示によらない．

$\lambda \in P$ とする．u_λ によって生成され，‘u_λ がウェイト λ の extremal ベクトルである’ という関係式で定義される $U_q(\mathfrak{g})$-加群を $V(\lambda)$ とかき，**extremal ウェイト加群**という．(正確な定義については，[7] を参照のこと．なお，[7] では $V^{\max}(\lambda)$ という記号が使われている．)

$\lambda \in P$ および $x \in W$ に対し，次の同型がある:

$$V(\lambda) \xrightarrow{\sim} V(x\lambda), \quad u_\lambda \mapsto S_{x^{-1}} u_{x\lambda} \tag{1}$$

$\lambda \in P$ および $x \in W$ に対し，$U_q^-(\mathfrak{g})$-加群 $V_x^-(\lambda)$ を

$$V_x^-(\lambda) = U_q^-(\mathfrak{g}) S_x u_\lambda \subset V(\lambda)$$

によって定める．これを **Demazure 部分加群**という．

$i \in I_0$ に対し，$\varpi_i = \Lambda_i - a_i^\vee \Lambda_0 \in P$ と定め，

$$P_{0,+} = \left\{ \sum_{i \in I_0} m_i \varpi_i \mid \forall i \in I_0,\ m_i \geq 0 \right\}$$

とおく．任意のレベル 0 のウェイトは Weyl 群の作用によって $P_{0,+} + \mathbb{Z}\delta$ の元に移すことができるため，(1) により $\lambda \in P_{0,+}$ に対する $V(\lambda)$ を調べればよいことになる．

$x \in W$ とするとき，$S_x u_{\varpi_i} \in V(\varpi_i)$ のことを $u_{x\varpi_i}$ とかくことにする．この書き方は一見すると x の取り方に依存するように見えるが，実は依存しないことが知られている [9, Section 5].

$\lambda = \sum_{i \in I_0} m_i \varpi_i \in P_{0,+}$ に対し,

$$\widetilde{V}(\lambda) = \bigotimes_{i \in I_0} V(\varpi_i)^{\otimes m_i}$$

とおく．このとき，$U_q(\mathfrak{g})$-加群の準同型 $\Phi_\lambda : V(\lambda) \to \widetilde{V}(\lambda)$ が、$u_\lambda \mapsto \bigotimes_{i \in I_0} u_{\varpi_i}^{\otimes m_i}$ によって定まる．次の定理は柏原 [9] によって予想され，Beck-中島 [1] によって解決された:

Theorem 2.3 ([1, Corollary 4.15])**.** $\lambda \in P_{0,+}$ に対し，$\Phi_\lambda : V(\lambda) \to \widetilde{V}(\lambda)$ は単射である．

3 主結果

前節の設定を踏襲する．

3.1 埋め込み $\Psi_\varepsilon : U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n) \to U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$

以降，$A = (a_{ij})_{i,j \in I}$ が $A_\ell^{(1)}$ 型 ($\ell \in \mathbb{Z}_{>0}$) のとき (すなわち，$\mathfrak{g} = \widehat{\mathfrak{sl}}_{\ell+1}$ のとき) を考える．また，整数 $n \geq 2$ を固定する．

$\varepsilon \in \{\pm 1\}$ に対して埋め込み $\Psi_\varepsilon : U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n) \hookrightarrow U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$ を与える．混乱を防ぐため，以下のように $\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1}$ に関連する対象に対しては ‘ $\breve{}$ ’ を付けた記法を用いる:

$\breve{E}_i, \breve{F}_i$ $(i = 0, \ldots, n)$ を $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$ の Chevalley 生成元とする．$\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1}$ の Cartan 部分代数を $\breve{\mathfrak{h}}$ で表し，その双対を $\breve{\mathfrak{h}}^*$ で表す．単純ルート，単純コルートはそれぞれ $\breve{\alpha}_i, \breve{\alpha}_i^\vee$ $(i = 0, \ldots, n)$ で表す．次数作用素は $\breve{d}$ で表し，$\breve{\delta} = \sum_{i=0}^n \breve{\alpha}_i$ を虚ルートの生成元とする．

$\breve{P}, \breve{P}^*$ をそれぞれ $\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1}$ のウェイト格子, コウェイト格子とする．基本ウェイトは $\breve{\Lambda}_i$ $(i = 0, \ldots, n)$ とかき，$\breve{\varpi}_i = \breve{\Lambda}_i - \breve{\Lambda}_0$ $(i = 1, \ldots, n)$ と定める．$\breve{P}_{0,+} = \{\sum_{i=1}^n m_i \breve{\varpi}_i \mid m_i \geq 0\}$ とおき，$\breve{Q}_0^\vee = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\breve{\alpha}_i^\vee$ と定める．

$\widehat{\mathfrak{sl}}_n$ のほうについては，‘ $\breve{}$ ’ は付けないこととする．

$\mathbb{Q}$-線形写像 $\mathfrak{h} \to \breve{\mathfrak{h}}$ を

$$j(\alpha_0^\vee) = s_n(\breve{\alpha}_0^\vee) = \breve{\alpha}_0^\vee + \breve{\alpha}_n^\vee, \quad j(\alpha_i^\vee) = \breve{\alpha}_i^\vee \ (i = 1, \ldots, n-1), \quad j(d) = \breve{d}$$

によって定める．

Theorem 3.1 ([12, Proposition 4.2])**.** $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ に対し，$\mathbb{Q}(q)$ 代数の単射準同型 $\Psi_\varepsilon : U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n) \to U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$ であって，

$$\Psi_\varepsilon(E_0) = T_n^\varepsilon(\breve{E}_0), \quad \Psi_\varepsilon(F_0) = T_n^\varepsilon(\breve{F}_0),$$
$$\Psi_\varepsilon(E_i) = \breve{E}_i, \quad \Psi_\varepsilon(F_i) = \breve{F}_i \ (i = 1, \ldots, n-1), \quad \Psi_\varepsilon(q^h) = q^{j(h)} \ (h \in P^*)$$

となるものが存在する．

3.2 $V(\breve{\varpi}_i)$ の分岐則

環準同型 $f : A \to B$ および B-加群 M に対し，A-加群 f^*M を，集合 M に A の作用を $x \cdot u = f(x) \cdot u$ で与えることによって定める．以下，本稿では $\lambda \in \breve{P}_{0,+}$ に対して $\Psi_\varepsilon^* V(\lambda)$ の構造について述べる．そのために，まず最も基本となる $\lambda = \breve{\varpi}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ のときを考える．

$i = 1, \ldots, n$ に対し，$U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$-加群 $N_{i,1}, N_{i,2}$ を

$$N_{i,1} = \begin{cases} \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} V(k\delta) & (i = 1) \\ V(\varpi_{i-1}) & (2 \le i \le n) \end{cases}, \quad N_{i,2} = \begin{cases} V(\varpi_i) & (1 \le i \le n-1) \\ \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} V(k\delta) & (i = n) \end{cases}.$$

によって定める．

$1 \le i \le n$ に対し，$U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$-加群の準同型 $\psi_{1,\varepsilon}^i : N_{i,1} \to \Psi_\varepsilon^* V(\breve{\varpi}_i)$ を以下のように定める:

- $i = 1$ に対しては，$U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$-加群の準同型 $\psi_{1,\varepsilon}^1 : N_{1,1} \to \Psi_\varepsilon^* V(\breve{\varpi}_1)$ は $u_{k\delta} \mapsto u_{-\breve{\varpi}_n + k\breve{\delta}}$ によって定義される．
- $2 \le i \le n$ に対しては，$U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$-加群の準同型 $\psi_{1,\varepsilon}^i : N_{i,1} \to \Psi_\varepsilon^* V(\breve{\varpi}_i)$ は $u_{\varpi_{i-1}} \mapsto u_{\breve{\varpi}_{i-1} - \breve{\varpi}_n}$ によって定義される．

また，$1 \le i \le n$ に対し，$U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$-加群の準同型 $\psi_{2,\varepsilon}^i : N_{i,2} \to \Psi_\varepsilon^* V(\breve{\varpi}_i)$ を次のように定める:

- $1 \le i \le n-1$ に対しては，$U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$-加群の準同型 $\psi_{2,\varepsilon}^i : N_{i,2} \to \Psi_\varepsilon^* V(\breve{\varpi}_i)$ は $u_{\varpi_i} \mapsto u_{\breve{\varpi}_i}$ によって定義される．
- $i = n$ に対しては，$U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$-加群の準同型 $\psi_{2,\varepsilon}^n : N_{n,2} \to \Psi_\varepsilon^* V(\breve{\varpi}_i)$ は $u_{k\delta} \mapsto u_{\breve{\varpi}_n + k\breve{\delta}}$ によって定義される．

このとき，以下が成立する:

Proposition 3.2 ([12, Proposition 4.11])**.** $1 \le i \le n$ に対し，$\psi_{1,\varepsilon}^i \oplus \psi_{2,\varepsilon}^i : N_{i,1} \oplus N_{i,2} \to \Psi_\varepsilon^* V(\breve{\varpi}_i)$ は $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$-加群の同型写像である．

Proposition 3.2 は，$A_\ell^{(1)}$ $(\ell \in \mathbb{Z}_{>0})$ 型の場合は**レベル・ゼロ基本表現** [9, Section 5] が対応する単純リー代数に付随する量子展開環の表現としては既約となること [10, Lemma 4.3] と，$U_q(\mathfrak{sl}_{n+1})$ の可積分最高ウェイト加群の $U_q(\mathfrak{sl}_n)$ への制限の分岐則から証明できる．

$1 \le i \le n$ に対し，$L_{1,\varepsilon}^i = \psi_{1,\varepsilon}^i(N_{i,1}), L_{2,\varepsilon}^i = \psi_{2,\varepsilon}^i(N_{i,2})$ とおく．

3.3 直和分解 $\Psi_\varepsilon^* V(\lambda) = \bigoplus_{p=0}^m M_{p,\varepsilon}$

$\lambda = \sum_{i=1}^n m_i \breve{\varpi}_i \in \breve{P}_{0,+}$ を固定し，$m = m_1 + \cdots + m_n$ とおく．また，$\chi_\lambda : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, n\}$ を

$$m_1 + \cdots + m_{\chi_\lambda(j)-1} + 1 \le j \le m_1 + \cdots + m_{\chi_\lambda(j)}$$

が任意の $j \in \{1, \ldots, m\}$ に対して成り立つように定義する．

$\mathcal{I} = \{1, 2\}^m$ とおき，$\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_m) \in \mathcal{I}$ に対して $\Psi_\varepsilon^* \left(\bigotimes_{i=1}^n V(\breve{\varpi}_i)^{\otimes m_i}\right)$ の $U_q(\mathfrak{sl}_n)$-部分加群

$L_{\mathfrak{i},\varepsilon}$ を

$$L_{\mathfrak{i},\varepsilon} = \bigotimes_{j=1}^{m} L_{i_j,\varepsilon}^{\chi_\lambda(j)}$$

によって定める．さらに，$0 \leq p \leq m$ に対して $\mathcal{I}_p = \{(i_1, \ldots, i_m) \in \mathcal{I} \mid \#\{j \mid i_j = 1\} = p\}$ とおき，$\Psi_\varepsilon^*(\bigotimes_{i=1}^n V(\breve{\varpi}_i)^{\otimes m_i})$ の $U_q(\mathfrak{sl}_n)$-部分加群 $L_{p,\varepsilon}$ を

$$L_{p,\varepsilon} = \bigoplus_{\mathfrak{i} \in \mathcal{I}_p} L_{\mathfrak{i},\varepsilon}$$

によって定める．

$\tilde{h} = \sum_{i=1}^n i\breve{\alpha}_i^\vee \in \breve{P}^*$ に対し，$q^{\tilde{h}} \in U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$ は $\Psi_\varepsilon(U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n))$ の任意の元と可換となる．よって，任意の $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$-加群 M に対し，$q^{\tilde{h}}$ の固有空間は全て $\Psi_\varepsilon^* M$ の $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$-部分加群となる．

Lemma 3.3 ([12, Lemma 4.14])**.** $1 \leq i \leq n$ に対し，$\Psi_\varepsilon^* V(\breve{\varpi}_i)$ の $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$-部分加群として次が成り立つ:

$$L_{1,\varepsilon}^i = \{u \in \Psi_\varepsilon^* V(\breve{\varpi}_i) \mid q^{\tilde{h}} u = q^{i-(n+1)} u\}, \quad L_{2,\varepsilon}^i = \{u \in \Psi_\varepsilon^* V(\breve{\varpi}_i) \mid q^{\tilde{h}} u = q^i u\}.$$

これにより，$L_{p,\varepsilon}$ が $q^{\tilde{h}}$ の固有値 $q^{\langle \tilde{h}, \lambda \rangle - p(n+1)}$ の固有空間であることがわかり，$U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$-加群としての直和分解

$$\Psi_\varepsilon^* \left(\bigotimes_{i=1}^n V(\breve{\varpi}_i)^{\otimes m_i} \right) = \bigoplus_{p=0}^m L_{p,\varepsilon}$$

を得る．$0 \leq p \leq m$ に対して $\Psi_\varepsilon^* V(\lambda)$ の $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$-部分加群 $M_{p,\varepsilon}$ を

$$M_{p,\varepsilon} = \{u \in \Psi_\varepsilon^* V(\lambda) \mid q^{\tilde{h}} u = q^{\langle \tilde{h}, \lambda \rangle - p(n+1)} u\}$$

によって定める．

Proposition 3.4 ([12, Proposition 4.18])**.** 次が成り立つ:

1. $\Phi_\lambda(M_{p,\varepsilon}) \subset L_{p,\varepsilon}$ が成り立つ．
2. 直和分解

$$\Psi_\varepsilon^* V(\lambda) = \bigoplus_{p=0}^m M_{p,\varepsilon}$$

が成り立つ．

$\mathbb{Q}(q)[t_1^{\pm 1}, \ldots, t_m^{\pm 1}]$ を Laurent 多項式環とする．$\mathbb{Q}(q)[t_1^{\pm 1}, \ldots, t_m^{\pm 1}]$ に次のように $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$-加群の構造を入れる:

- E_i, F_i は自明に作用する．
- 単項式 $t_1^{k_1} \cdots t_m^{k_m}$ $(k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{Z})$ はウェイト $(k_1 + \cdots + k_m)\delta$ をもつ．

対称群 $\mathfrak{S}_m$ が $\mathbb{Q}(q)[t_1^{\pm 1}, \ldots, t_m^{\pm 1}]$ に変数 $t_1, \ldots, t_m$ の入れ替えによって作用する．この作用で不変な元全体のなす集合を $\mathbb{Q}(q)[t_1^{\pm 1}, \ldots, t_m^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_m}$ で表す．

$M_{0,\varepsilon}$ および $M_{m,\varepsilon}$ については，次のように $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ の extremal ウェイト加群と対称 Laurent 多項式環のテンソル積になる:

Theorem 3.5 ([12, Theorem 4.27 + Theorem 4.28])**.** $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$-加群の同型

$$M_{0,\varepsilon} \cong V\left(\sum_{i=1}^{n-1} m_i \varpi_i\right) \otimes (\mathbb{Q}(q)[t_1^{\pm 1}, \dots, t_{m_n}^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_{m_n}}),$$
$$M_{m,\varepsilon} \cong (\mathbb{Q}(q)[t_1^{\pm 1}, \dots, t_{m_1}^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_{m_1}}) \otimes V\left(\sum_{i=1}^{n-1} m_{i+1} \varpi_i\right)$$

がある．

$\mathcal{I}_p$ 上に辞書式順序 $<$ を次のように定める:

Defintion 3.6. $\mathfrak{i} = (i_1, \dots, i_m), \mathfrak{j} = (j_1, \dots, j_m) \in \mathcal{I}_p$ に対し，ある $1 \le k \le m$ があって次を満たすとする:

- 任意 $l < k$ に対して $i_l = j_l$ である．
- $i_k < j_k$ である．

このとき，$\mathfrak{i} < \mathfrak{j}$ と定める．

$<$ は $\mathcal{I}_p$ 上の全順序を定めることに注意する．
$\mathfrak{i} \in \mathcal{I}_p$ に対し，$L_{p,\varepsilon}$ の $U_q(\mathfrak{sl}_n)$-部分加群 $L_{\le \mathfrak{i},\varepsilon}, L_{\ge \mathfrak{i},\varepsilon}$ を

$$L_{\le \mathfrak{i},\varepsilon} = \bigoplus_{\mathfrak{j} \in \mathcal{I}_p, \mathfrak{j} \le \mathfrak{j}} L_{\mathfrak{j},\varepsilon}, \quad L_{\ge \mathfrak{i},\varepsilon} = \bigoplus_{\mathfrak{j} \in \mathcal{I}_p, \mathfrak{j} \ge \mathfrak{i}} L_{\mathfrak{j},\varepsilon}$$

と定める．

Proposition 3.7 ([12, Proposition 4.20])**.** 次が成り立つ:

1. $\varepsilon = 1$ のとき，$L_{\ge \mathfrak{i},\varepsilon}$ は $L_{p,\varepsilon}$ の $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$-部分加群である．
2. $\varepsilon = -1$ のとき，$L_{\le \mathfrak{i},\varepsilon}$ は $L_{p,\varepsilon}$ の $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$-部分加群である．

$\mathfrak{i}, \mathfrak{j} \in \mathcal{I}_p$ とする．$\mathfrak{i} < \mathfrak{j}$ であり，$\mathfrak{i} < \mathfrak{k} < \mathfrak{j}$ となる $\mathfrak{k} \in \mathcal{I}_p$ が存在しないとき，$\mathfrak{j} = \mathfrak{i}_+, \mathfrak{i} = \mathfrak{j}_-$ とかくことにする．
$\mathfrak{i} \in \mathcal{I}_p$ および $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ のとき，$U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$-加群 $\mathcal{L}_{\mathfrak{i},\varepsilon}$ を次のように定める:

$$\mathcal{L}_{\mathfrak{i},1} = \begin{cases} L_{\ge \mathfrak{i},1} & (\mathfrak{i} \text{ is maximum}) \\ L_{\ge \mathfrak{i},1}/L_{\ge \mathfrak{i}_+,1} & (\text{otherwise}) \end{cases}, \quad \mathcal{L}_{\mathfrak{i},-1} = \begin{cases} L_{\le \mathfrak{i},-1} & (\mathfrak{i} \text{ is minimum}) \\ L_{\le \mathfrak{i},-1}/L_{\le \mathfrak{i}_-,-1} & (\text{otherwise}) \end{cases}.$$

このとき，自然な $U_q(\mathfrak{sl}_n)$-線形写像

$$\Xi_{\mathfrak{i},1} : \bigotimes_{j=1}^{m} N_{\chi_\lambda(j),i_j} \xrightarrow{\sim} L_{\mathfrak{i},1} \hookrightarrow L_{\ge \mathfrak{i},1} \to \mathcal{L}_{\mathfrak{i},1}$$

および

$$\Xi_{\mathfrak{i},-1}:\bigotimes_{j=1}^{m}N_{\chi_\lambda(j),i_j}\xrightarrow{\sim}L_{\mathfrak{i},-1}\hookrightarrow L_{\leq\mathfrak{i},-1}\to\mathcal{L}_{\mathfrak{i},-1}$$

がある.

Proposition 3.8 ([12, Proposition 4.21]). 任意の $\mathfrak{i}=(i_1,\ldots,i_m)\in\mathcal{I}_p$ に対し,

$$\Xi_{\mathfrak{i},\varepsilon}:\bigotimes_{j=1}^{m}N_{\chi_\lambda(j),i_j}\to\mathcal{L}_{\mathfrak{i},\varepsilon}$$

は $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$-加群の同型写像である.

3.4 $V(m\breve{\varpi}_i)$ の分岐則

筆者は, $\lambda=m\breve{\varpi}_i$ $(m\in\mathbb{Z}_{>0},1\leq i\leq n)$ の場合おいてレベル・ゼロ extremal ウェイト加群の分岐則を与えた.

Theorem 3.9 ([12, Corollary 5.4+Corollary 5.9+Corollary 5.12]). $m\in\mathbb{Z}_{>0},1\leq i\leq n$ のとき, 次が成り立つ:

$$\Psi_\varepsilon^*V(m\breve{\varpi}_i)\cong\begin{cases}\bigoplus_{p=0}^{m}\mathbb{Q}(q)[t_1^{\pm1},\ldots,t_p^{\pm1}]^{\mathfrak{S}_p}\otimes V((m-p)\varpi_1) & (i=1)\\ \bigoplus_{p=0}^{m}V(p\varpi_{i-1}+(m-p)\varpi_i) & (2\leq i\leq n-1)\\ \bigoplus_{p=0}^{m}V(p\varpi_{n-1})\otimes\mathbb{Q}(q)[t_1^{\pm1},\ldots,t_{m-p}^{\pm1}]^{\mathfrak{S}_{m-p}} & (i=n)\end{cases}.$$

まず, $2\leq i\leq n-1$ かつ $\varepsilon=1$ の場合において証明の概略を述べる.

$M_{p,1}\cong V(p\varpi_{i-1}+(m-p)\varpi_i)$ を示せばよい. $\mathfrak{i}=(\overbrace{1,\ldots,1}^{p},\overbrace{2,\ldots,2}^{m-p})\in\mathcal{I}_p$ に対し, 次のような $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$-加群の準同型があることに注意する:

$$\tau_{p,1}^i:M_{p,1}\xrightarrow{\Phi_{m\breve{\varpi}_i}|M_{p,1}}L_{p,1}=L_{\geq\mathfrak{i},1}\to\mathcal{L}_{\mathfrak{i},1}\xrightarrow{\Xi_{\mathfrak{i},1}^{-1}}V(\varpi_{i-1})^{\otimes p}\otimes V(\varpi_i)^{\otimes m-p}.$$

$\xi=k\breve{\alpha}_i^\vee\in\breve{Q}_0^\vee,\zeta=k\alpha_{i-1}^\vee+k\alpha_i^\vee\in Q_0^\vee$ とおく. このとき, $\tau_{p,1}^i(M_{p,1}\cap V_{t_\xi}^-(m\breve{\varpi}_i))$ は $V(\varpi_{i-1})^{\otimes p}\otimes V(\varpi_i)^{\otimes m-p}$ の $U_q^-(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$-部分加群 $U_q^-(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)((u_{\varpi_{i-1}-k\delta})^{\otimes p}\otimes(u_{\varpi_i-k\delta})^{\otimes m-p})$ を含むことがわかる. [14] の結果を使うと, $M_{p,1}\cap V_{t_\xi}^-(m\breve{\varpi}_i)$ および $U_q^-(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)((u_{\varpi_{i-1}-k\delta})^{\otimes p}\otimes(u_{\varpi_i-k\delta})^{\otimes m-p})$ の次数付き指標が計算でき, これらは一致することがわかる. したがって $\tau_{p,1}^i$ は $U_q^-(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$-加群の同型

$$\begin{aligned}M_{p,1}\cap V_{t_\xi}^-(m\breve{\varpi}_i)&\cong U_q^-(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)((u_{\varpi_{i-1}-k\delta})^{\otimes p}\otimes(u_{\varpi_i-k\delta})^{\otimes m-p})\\&=\Phi_{p\varpi_{i-1}+(m-p)\varpi_i}(V_{t_\zeta}^-(p\varpi_{i-1}+(m-p)\varpi_i))\end{aligned}$$

を誘導する. ここで

$$V(m\breve{\varpi}_i)=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}V_{t_{k\breve{\alpha}_i^\vee}}^-(m\breve{\varpi}_i),\quad V(p\varpi_{i-1}+(m-p)\varpi_i)=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}V_{t_{k(\alpha_{i-1}^\vee+\alpha_i^\vee)}}^-(p\varpi_{i-1}+(m-p)\varpi_i)$$

が成り立つので, $\tau_{p,1}^i$ は同型

$$M_{p,1}\cong\Phi_{p\varpi_{i-1}+(m-p)\varpi_i}(V(p\varpi_{i-1}+(m-p)\varpi_i))\cong V(p\varpi_{i-1}+(m-p)\varpi_i)$$

を誘導することがわかる.

$2 \le i \le n-1$ かつ $\varepsilon = -1$ のときの証明も全く同様である. $i=1$ や $i=n$ に対する主張の証明も筋道は同じであるが, 右辺の対称 Laurent 多項式に対応する元をつくるため, 量子アフィン展開環の下三角部分代数における ‘Schur 多項式に対応するベクトル’ [1, Section 3] を用いる.

参考文献

[1] J. Beck and H. Nakajima, Crystal bases and two-sided cells of quantum affine algebras, *Duke Math. J.* 123 (2004), 335–402.

[2] V. G. Drinfeld, Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation, *Dokl. Akad.Nauk SSSR* **283** (1985), *no.*5, 1060-1064.

[3] V. G. Drinfeld, New realization of Yangian and quantum affine algebra, *Dokl. Akad.Nauk SSSR* **296** (1987), no.1, 13-17; *translation in Soviet Math. Dokl.* **36** (1988), *no.* 2, 212-216.

[4] M. Ishii, S. Naito, and D. Sagaki, Semi-infinite Lakshmibai-Seshadri path model for level-zero extremal weight modules over quantum affine algebras, *Adv. Math.* **290** (2016), 967–1009.

[5] M. Jimbo, A q-difference analogue of $U(\mathfrak{g})$ and the Yang-Baxter equation, *Lett. Math. Phys.* **10** (1985), *no.*1, 63-69.

[6] V.G. Kac, Infinite dimensional Lie algebras (3rd Ed.), Cambridge University Press, 1990.

[7] M. Kashiwara, Crystal bases of modified quantized enveloping algebra, *Duke Math. J.* 73 (1994), 383–413.

[8] M. Kashiwara, On crystal bases, *Representations of groups* (*Banff*, *AB*, 1994), 155-197, *CMS Conf.Proc.*, 16, *Amer. Math.Soc.*, *Providence*, *RI*, 1995.

[9] M. Kashiwara, On level zero representations of quantized enveloping algebras, *Duke Math. J.* 112 (2002), 117–175.

[10] M. Kashiwara, Level zero fundamental representations over quantized affine algebras and Demazure modules, *Publ. Res.Inst. Math. Sci.* **41** (2005), *no.* 1, 223–250

[11] G. Lusztig, Introduction to Quantum Groups, Progress in Math. **110**, Birkhäuser, 1993.

[12] S. Nakaoka, Branching rules for level-zero extremal weight modules from $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$ to $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$, arXiv preprint arXiv:2501.11559 (2025).

[13] H. Nakajima, Extremal weight modules of quantum affine algebras, *Representation theory of algebraic groups and quantum groups*, 343–369, *Adv. Stud. Pure Math.*, 40, *Math. Soc. Japan*, *Tokyo*, 2004.

[14] S. Naito, and D. Sagaki, Demazure submodules of level-zero extremal weight modules and specializations of Macdonald polynomials, *Math. Z.* **283** (2016), *no.* 3-4, 937–978.